

**Exercice N°1: (5pts)**

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1/ Soient $A(1, 2, 0)$ et $B(5, -2, 2)$ deux points de ξ

Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble E des points $M(x, y, z) \in \xi$

tel que $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

2/ Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \xi$ tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z + 1 = 0$$

Montrer que S est la sphère de centre $I(3, 0, 1)$ et de rayon $R = 3$

3/ Soit $m \in \mathbb{R}_+$

Considérons les plans $P_m : x + (1 + m)y + m\sqrt{10}z - 3 = 0$

a) Caractériser l'ensemble $P_m \cap S$ suivant les valeurs de m

b) Montrer que $P_0 \cap S$ est le cercle de centre I et de diamètre $[AB]$.

Exercice N°2 (5 points)

Sur une même Verticale, les hauteurs barométriques Y diminuent avec l'altitude X conformément au tableau suivant.

X (Km)	0	1	2	4	6	10
Y (cm de mercure)	76	67	59	46	35	20

1/a) Représenter graphiquement la série statistique par un nuage de points.

b) Vérifier q'un ajustement linéaire parait justifié.

2/a) Calculer \bar{X} ; \bar{Y} ; $V(X)$; $V(Y)$ et $cov(X, Y)$

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y puis retrouver le résultat de 1/b

b) Déterminer une équation cartésienne de D .

c) Tracer la droite d'ajustement D de Y en X .

3/ Donner une estimation de la hauteur barométrique pour une altitude de 8 Km.

Problème : (10 pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \text{Log}(x+1) - \text{Log}x - \frac{1}{x+1}$

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2/a) Montrer que : $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \forall x > 0$ puis dresser le tableau de variation de g

b) En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) > 0$

II- Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\text{Log}(x+1) - x\text{Log}x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j}) ; \|\vec{i}\| = 4\text{cm}$$

1/a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

2/ Montrer que $\forall x > 0 : f(x) = \frac{\text{Log}(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$; en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

3/a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4 / Soit la droite $D : y = x$. Etudier la position relative de ζ_f par rapport à D

5/ Tracer D et ζ_f

6/a) Montrer que $\int_1^2 x\text{Log}(x+1)dx = \frac{3}{2}\text{Log}3 - \frac{1}{4}$ (Remarquer que : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$)

c) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives : $x = 1, x = 2, y = 0$ et la courbe ζ_f

III- Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1/ Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

2/ Montrer que la suite U est croissante

3/ En déduire que U est convergente et calculer sa limite



Durée : 3.h

Exercice N°1: (5pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1/ Soient $A(1, 2, 0)$ et $B(5, -2, 2)$ deux points de ξ

Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble E des points $M(x, y, z) \in \xi$ tel que $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

2/ Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \xi$ tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z + 1 = 0$$

Montrer que S est la sphère de centre $I(3, 0, 1)$ et de rayon $R = 3$

3/ Soit $m \in \mathbb{R}_+$

Considérons les plans $P_m : x + (1 + m)y + m\sqrt{10}z - 3 = 0$

a) Caractériser l'ensemble $P_m \cap S$ suivant les valeurs de m

b) Montrer que $P_0 \cap S$ est le cercle de centre I et de diamètre $[AB]$.

Exercice N°2 (5 points)

Sur une même Verticale, les hauteurs barométriques Y diminuent avec l'altitude X conformément au tableau suivant.

X (Km)	0	1	2	4	6	10
Y (cm de mercure)	76	67	59	46	35	20

1/a) Représenter graphiquement la série statistique par un nuage de points.

b) Vérifier q'un ajustement linéaire paraît justifié.

2/a) Calculer \bar{X} ; \bar{Y} ; $V(X)$; $V(Y)$ et $\text{cov}(X, Y)$

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y puis retrouver le résultat de 1/b

b) Déterminer une équation cartésienne de D .

c) Tracer la droite d'ajustement D de Y en X .

3/ Donner une estimation de la hauteur barométrique pour une altitude de 8 Km.

Problème : (10 pts)

I- Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \text{Log}(x+1) - \text{Log}x - \frac{1}{x+1}$

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2/a) Montrer que : $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \forall x > 0$ puis dresser le tableau de variation de g

b) En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) > 0$

II- Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\text{Log}(x+1) - x\text{Log}x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j}) ; \|\vec{i}\| = 4\text{cm}$$

1/a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

2/ Montrer que $\forall x > 0 : f(x) = \frac{\text{Log}(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$; en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

3/a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $f'(x) = g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4 / Soit la droite $D : y = x$. Etudier la position relative de ζ_f par rapport à D

5/ Tracer D et ζ_f

6/a) Montrer que $\int_1^2 x\text{Log}(x+1)dx = \frac{3}{2}\text{Log}3 - \frac{1}{4}$ (Remarquer que : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$)

c) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives : $x = 1, x = 2, y = 0$ et la courbe ζ_f

III- Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = \frac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1/ Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{e-1}$

2/ Montrer que la suite U est croissante

3/ En déduire que U est convergente et calculer sa limite